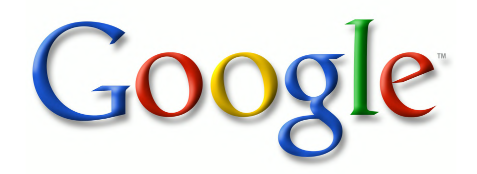


ÜBER DIE ENTWICKLUNG EINIGER MATHEMATISCHER BEGRIFFE IN NEUERER ZEIT.

VORTRAG

GEHALTEN IN DER

FEIERLICHEN SITZUNG DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

AM 29. MAI 1906

VON

WILHELM WIRTINGER,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

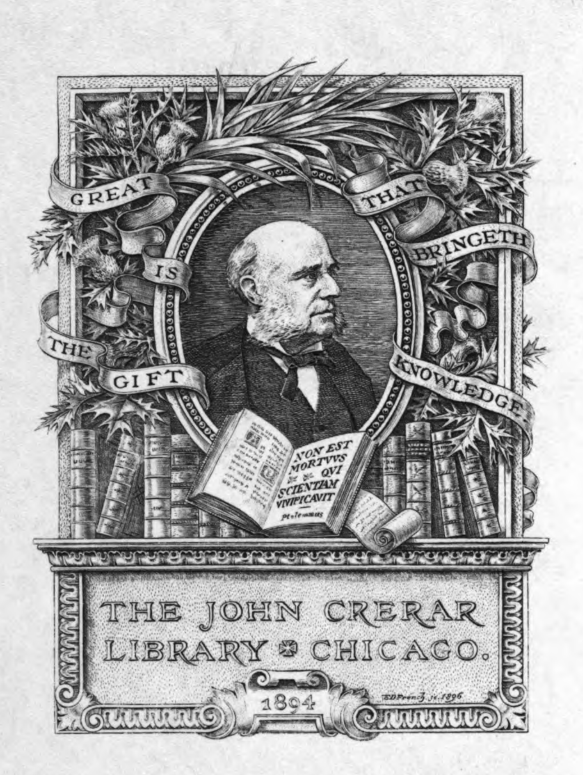
WIEN 1906.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.


GREAT
IS
THE
GIFT
THAT
BRINGETH
KNOWLEDGE
NON EST
MORTVVS
QVI
SCIENTIAM
VIVIFICAVIT
Ptolemaus
THE JOHN CRERAR
LIBRARY CHICAGO.
1894
E.D. French, sc. 1896

ÜBER DIE

ENTWICKLUNG EINIGER MATHEMATISCHER BEGRIFFE

IN

NEUERER ZEIT.

VORTRAG

GEHALTEN IN DER

FEIERLICHEN SITZUNG DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

AM 29. MAI 1906

VON

WILHELM WIRTINGER,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

WIEN 1906.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

In keinem Gebiete des menschlichen Wissens ist wohl der Unterschied zwischen den Interessen der Fachleute und dem Inhalte der allgemeinen Bildung so groß, die Verständigung so schwierig, ja der Inhalt der mit gleichen Worten bezeichneten Grundvorstellungen im Sinne der strengen Wissenschaft und im gewöhnlichen Sprachgebrauch so verschieden, als im Gebiete der Mathematik. Der Ursachen, die hier zusammenwirken, sind viele und sie haben die Entwicklung unserer Wissenschaft wohl von allem Anfang an begleitet, so daß es schon zu Euklid's Zeiten nicht viel anders gewesen sein mag. Zum Teil mag hier die Notwendigkeit wirksam sein, Dinge, die sich uns unmittelbar darbieten, wie die ganze Zahl, die vier Grundrechnungsarten, die einfachsten geometrischen Gebilde unter allgemeinen und abstrakten Gesichtspunkten zu betrachten, in denen vom anschaulichen Korrelat nur seine Beziehungen zu einer Reihe formaler Definitionen und Festsetzungen in Betracht kommen, zum anderen Teil die notwendige und unentbehrliche Zeichensprache, die erst nach vollzogener Abstraktion sich entwickeln konnte oder besser, die selbst einen Teil dieser Abstraktion bildet. Nicht zum geringsten aber ist dieses Verhältnis ein Produkt der historischen Entwicklung unserer Wissenschaft überhaupt, welche in einzelnen Perioden ein überaus rasches Wachstum nach außen erlebte, denen Zeiten der Sammlung und der kritischen Betrachtung folgten. In den ersteren Perioden waren ihre Ergebnisse zu

neu und zu viel umstritten, um in den allgemeinen Unterricht aufgenommen werden zu können, in den letzteren aber zog sie die öffentliche Aufmerksamkeit zu wenig auf sich, um durch einen starken Druck die natürliche Neigung des Unterrichtes zum Beharren in einem als erträglich befundenen Zustand zu überwinden. So kommt es, daß unsere Mittelschulen in der Geometrie nicht über Descartes hinausgehen, dessen Geometrie 1637 erschienen ist und der doch nur ein Vorläufer des heroischen Zeitalters der Mathematik ist, wie man die Zeit von Leibnitz und Newton bis einschließlich Laplace mit Recht genannt hat. In der Tat läßt sich kaum ein anderer Abschnitt in der Geschichte der Mathematik an Fülle der Ideen sowohl als auch an Lebhaftigkeit der Wechselwirkung zwischen den Problemen der Mathematik, Physik, Astronomie einerseits und den allgemeinen philosophischen Gedanken andrerseits mit jener Zeit vergleichen. Nicht alles, was damals der Mathematik unterworfen wurde, hat sie als bleibendes Besitztum behalten können. Die Idee einer strengen Gesetzmäßigkeit in allem physischen Geschehen hat einer wesentlich kühleren und vorsichtigeren Betrachtungsweise weichen müssen. Gleichwohl hat der in dieser Zeit geprägte Funktionsbegriff und die Art seiner Verwendung in der Naturforschung eine solche Bedeutung gewonnen, daß der Wunsch begreiflich erscheint, diesen Begriff und seine Verwertung nun nach zweihundert Jahren, also gewiß nicht voreilig, dem Lehrstoff unserer Mittelschulen einzufügen. Es ist dies vielleicht der einzige Fall, daß ein Gedanke, der so lange Zeit in der gesamten Wissenschaft von der größten Fruchtbarkeit gewesen ist, diese Fruchtbarkeit im Unterricht der höheren Schulen nur äußerst indirekt zeigen durfte. Frankreich ist hier in der letzten Zeit vorangegangen, in Deutschland macht man den

Versuch und **wir** streben nun diesen Schritt an. Die allgemeine Bedeutung dieses Begriffes will ich jedoch hier nicht erörtern, sondern mich damit begnügen, unseren Kollegen Mach[1]) anzuführen, der nach eingehender Erwägung zu dem Schlusse gekommen ist, daß in denjenigen Naturwissenschaften, welche der Messung zugänglich sind, der vulgäre Begriff von Ursache und Wirkung gegenüber dem Funktionsbegriff überflüssig ist.

Erlauben Sie mir aber, auf die Entwicklung einiger anderer mathematischer Begriffe hier ihre Aufmerksamkeit zu lenken, vor allem auf den Begriff, der schon von altersher als Grundlage der Arithmetik angesehen wird, nämlich den Begriff der ganzen Zahl.

Es scheint zunächst seltsam, daß ein so alter, in unseren Denkgewohnheiten festgewurzelter Begriff, ein Begriff, der unsere gesamte Kulturentwicklung begleitet und beeinflußt hat, noch keine abschließende, allgemein angenommene Darstellung gefunden hat. Aber dieser Umstand wird uns sofort ganz verständlich, wenn wir bedenken, daß der Zahlbegriff dieses Schicksal mit den Anschauungen über unsere Geistestätigkeit überhaupt teilt, und daß die Grundlagen unserer Erkenntnis einer abschließenden definitiven Fassung vielleicht überhaupt nicht fähig sind. Immer wieder zeigt sich die Erscheinung, daß die Methoden und Ideen, welche auf irgend einem Gebiete der wissenschaftlichen Forschung oder auch der Organisation der Gesellschaft ihre Kraft bewährt und einen wirklichen Fortschritt, sei es in Bezug auf Erkenntnis, sei es in Bezug auf Macht und Können bewirkt haben, nun auch auf die Erforschung der Grundlagen unseres Denkens angewendet werden, der sie selbst durch ihr bloßes Dasein und ihre Wirksamkeit neue Aufgaben stellen. So erscheint alle Klarheit nur als eine relative, gemessen an den

jeweilig in unserem Bewußtsein vorhandenen Ansprüchen, Hilfsmitteln und Ideen.

Erwarten sie nun nicht, daß ich Sie durch Ausführung von Beispielen für diese allgemeinen und längst geläufigen Gedanken ermüde, auch nicht, daß ich diesen Gedanken in der verschiedenen Fassung des Zahlbegriffes ins einzelne durchführe. Gestatten Sie mir nur, einige der bemerkenswertesten Versuche der neueren Zeit Ihnen vorzuführen und zu besprechen.

Lassen Sie mich mit Helmholtz[2]) beginnen. In dem Aufsatz über Zählen und Messen (1887) hat er seine Anschauungen über den Gegenstand ausführlich entwickelt. Seine Absicht geht dahin, die Arithmetik als eine auf rein psychologische Tatsachen aufgebaute Methode nachzuweisen, durch welche die folgerichtige Anwendung eines Zeichensystems, nämlich der Zahlen, von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung gelehrt wird. Das Zählen ist ihm ein Verfahren, welches darauf beruht, die Reihenfolge, in der Bewußtseinsakte zeitlich nacheinander eingetreten sind, im Gedächtnis zu behalten. Die Zahlen aber sind ihm eine Reihe willkürlicher Zeichen, für welche nur eine bestimmte Art des Aufeinanderfolgens als die normale festgehalten wird. Diese Zeichen werden in erster Linie als Ordnungszahlen gebraucht. Ein Grund, diese Reihe abzubrechen, oder in ihr zu einem schon früher gebrauchten Zeichen zurückzukehren, sei nicht vorhanden. Die Addition aber erklärt er in der Weise, daß er die Zahlenreihe selbst als eine im Bewußtsein gegebene Reihe von Vorstellungen auffaßt, deren Ordnung wir wieder durch die von 1 beginnende Zahlenreihe bezeichnen können. Beim Beweise der Additionsgesetze bedient er sich jener Schlußweise, welche als Bernouilli'sches Verfahren der

vollständigen Induktion bekannt ist und welche darin besteht, daß aus der Annahme des Bestehens eines Satzes für alle Fälle einer geordneten Reihe, bis zu einem beliebigen, zunächst die Gültigkeit für den nächstfolgenden erwiesen wird. Kann dann der Satz für die ersten Glieder der Reihe direkt — etwa durch wirklichen Vollzug der geforderten Operationen — erwiesen werden, so gilt er allgemein, das heißt für jedes Glied der Reihe.

Die philosophische Kritik [3]) hat an dieser Darstellung vor allem ausgesetzt, daß sie eine nominalistische sei, sich darauf beschränke, den psychologischen Akt der Abzählung zu beschreiben, den zu Grunde liegenden Gedanken der Einheit aber nur versteckt einführe.

Die in dem gleichen Band gegebenen Auseinandersetzungen Kronecker's [4]) stehen, was die Grundauffassung betrifft, dem Standpunkt von Helmholtz sehr nahe, gehen aber darin weiter, daß sie die Überzeugung Kronecker's zum Ausdruck bringen, daß es möglich sei, die ganze Mathematik, mit Ausnahme der Geometrie und Mechanik, auf den im engsten Sinn genommenen Zahlbegriff zurückzuführen. Er hat diese Tendenz als Arithmetisierung der Mathematik [5]) bezeichnet und nach ihm hat F. Klein diesen Ausdruck in viel weiterem Sinne wieder aufgenommen.

Die Ausführungen Kroneckers stehen zum Teil in bewußtem Gegensatz zu anderen Darstellungen, welche sich auf die Erweiterungen des Zahlbegriffes, inbesondere die Einführung der irrationalen Zahlen beziehen. Aber die grundlegende Frage kommt bereits bei der Betrachtung der ganzen positiven Zahlen in Betracht und dies ist sogleich nachdem Erscheinen jener Aufsätze von Georg Cantor [6]) nachdrücklich betont und ausgesprochen und seither neuerdings von Poincaré [7]) und Hilbert [8]) hervorgehoben worden.

Es handelt sich nämlich darum, ob man die Zahlenreihe als unendliche betrachtet und ob man dieser Betrachtungsweise von vornherein zustimmt oder nicht. In der Tat, wenn man wie Helmholtz die Zahlen als ein System von Zeichen betrachtet, entsprungen aus der wirklich ausgeübten Funktion des Zählens, dann finden wir zwar kein Hindernis im konkreten Fall weiter fortzuschreiten, aber der einzelne arithmetische Satz bezieht sich dann nur immer auf die bereits vorräthigen Zahlen und der Schluß von n auf $n + 1$ wird ein hypothetischer, nämlich unter der Voraussetzung gemacht, daß man tatsächlich weiter zählen könne und auch wirklich zähle.

Es scheint mir nun nicht zweifelhaft, daß man mit der Betrachtung der Zahlenreihe als Ganzes einen über die Erfahrung hinausgehenden Schritt macht, sei dieser nun eine Folge der Beschaffenheit unseres Verstandes [9]), oder falle er in den Bereich der erlaubten und gerechtfertigten Hypothesenbildung.

Daß aber der Schritt von den wirklichen, durchgezählten Zahlen zur Gesamtheit aller Zahlen durchaus nicht etwa automatisch und mit Notwendigkeit sich vollzieht, kann man beobachten, wenn man auf frühen oder nicht wissenschaftlich geschulten Entwicklungsstufen der Frage begegnet, ob es noch größere Zahlen als diese oder jene wirklich gebe. Auch die bekannte Schwierigkeit, welche beim Unterricht gerade den ersten allgemeinen Sätzen über Zahlen sich entgegenstellt, liegt, abgesehen von den Schwierigkeiten jeder allgemeinen Begriffsbildung, auch zum guten Teil darin, daß der Gedanke einer nirgends abbrechenden, gesetzmäßigen Reihe, welcher eigentlich die Unterlage jedes allgemeinen Satzes der Arithmetik ist, eben neu und darum auf dieser Stufe zuerst psychologisch einzuleiten ist. In gewissem

Sinne liegt hier ein ähnlicher Vorgang der Idealisierung vor, wie wir ihn mit den konkreteren Objekten der Außenwelt, etwa den starren Körpern, vornehmen müssen, wenn wir sie zum Gegenstand der Geometrie machen, wenn es auch wieder an Verschiedenheiten dieser beiden Vorgänge nicht fehlt. Hält man dies fest, so wird der auf den ersten Blick befremdliche Vorsatz begreiflich, die gesamte unendliche Zahlenreihe mit einem Male einzuführen, und zwar in der Weise, daß man zuerst an die Einführung unendlicher Mengen von Dingen herantritt, um dann diejenigen, aus welchen die Zahlenreihe hergeleitet werden kann, besonders zu charakterisieren.

Dieser Art ist die Darstellung und Einführung des Begriffes der ganzen Zahlen, welche Dedekind[10]) gegeben hat. Er geht von der Tatsache aus, daß unser Geist die Fähigkeit habe, ein Ding auf ein anderes zu beziehen und überhaupt Dinge einander zuzuordnen und ist der Ansicht, daß auf dieser Fähigkeit des menschlichen Geistes die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden könne! Hieraus ist auch die Berechtigung des Verfahrens der vollständigen Induktion und der Definition neuer Elemente durch vorhergehende in unbegrenzter Anzahl, also der Definition durch Rekursion, herzuleiten. Die einzelnen Schritte sind hier absichtlich ganz ins einzelne zergliedert und ich muß mich daher mit einem Bericht über den Gedankengang im allgemeinen begnügen.

Es wird zunächst der allgemeine Begriff der Abbildung oder Beziehung entwickelt und besonders diejenige Art der Abbildung hervorgehoben, welche nicht nur dem ursprünglich Abzubildenden ein Bild in eindeutig bestimmter Weise zuordnet, sondern auch umgekehrt so beschaffen ist, daß das ursprüngliche Objekt auch seinerseits durch das Bild

bestimmt ist. Beispiele solcher Abbildungen sind die Benennung einer Reihe von Objekten mit bestimmten Namen oder Zeichen. Eine Abbildung der letzteren Art wird deutlich oder ähnlich genannt, wenn umgekehrt aus dem Bild auch das Abgebildete eindeutig erkannt werden kann. Zwei solche Systeme, welche sich gegenseitig in dieser Weise aufeinander abbilden lassen, heißen ähnlich. Kette wird ein Teil eines Systems genannt, wenn er bei einer bestimmten Abbildung des Systems in einen Teil seiner selbst übergeht, also die Bilder wieder Teile des Systemteiles sind, ohne ihn jedoch zu erschöpfen.

Sodann folgt die Erklärung eines unendlichen Systems als eines solchen, welches auf einen Teil seiner selbst deutlich abgebildet werden kann. Hierauf wird der Satz aufgestellt, es gibt unendliche Systeme, denn die Gesamtheit aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Die Definition einfach unendlicher Systeme bildet den nächsten Schritt. Sie werden erklärt als Systeme, für die es eine deutliche Abbildung in sich selbst gibt, so daß also seine Elemente aus einem ersten durch sukzessive Anwendung einer und derselben Abbildung erhalten werden, wobei jedes Element mit Ausnahme des ersten als Bild seines Vorgängers erscheint. In dieser Anordnung heißt die Kette geordnet. Wenn man nun nur die Beziehungen auffaßt, welche bei der Betrachtung dieser Elemente durch die ordnende Abbildung zwischen ihnen hergestellt sind, so werden diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordnungszahlen genannt. Alle ihre Eigenschaften sollen sich daraus ergeben, daß sie ein unendliches System bilden, für welches eine deutliche Abbildung von der geschilderten Beschaffenheit existiert. Im besonderen erscheint dann auch das Schlußverfahren von n auf $n+1$ in der Beschaffenheit dieser

Abbildung begründet und nur als ein spezieller Fall eines allgemeineren Verfahrens.

Diese Darstellung weist eine Reihe von eigentümlichen Erscheinungen auf, welche wir nun näher ins Auge fassen wollen. Erstens sehen wir, daß der Versuch gemacht wird, ein Gedankending wirklich zu bilden, welches die wesentlichen Eigenschaften der Zahlenreihe hat, also eine Konstruktion im weiteren Sinn. Diese Konstruktion wird mit der Annahme gewisser Fähigkeiten des menschlichen Geistes von zwar sehr allgemeiner, aber immerhin einfacher Natur durchgeführt. Aber das Resultat dieser Konstruktion muß nicht notwendig mit den uns geläufigen, auf psychologischem Wege erworbenen Zahlbegriffen zusammenfallen, obgleich wir diese leicht darauf anwenden können und die gewonnenen Grundeigenschaften an den — gestatten Sie mir diesen provisorischen Ausdruck — psychologischen Zahlen leicht erkennen. Die Abbildung wird hier zum Fortzählen um eins. Wir haben also hier nicht die Idealisierung eines gegebenen Begriffes vor uns, sondern die Bildung eines idealen Gegenstandes, an dem wir Eigenschaften und Beziehungen nachweisen zufolge seiner Konstruktion, und zwar solche Eigenschaften und Beziehungen, wie wir sie früher als hinreichend zur Herleitung der wichtigsten Eigenschaften des Systems der ganzen Zahlen, als Ordnungszahlen aufgefaßt, erkannt haben.

Auch die zum Zwecke der Einführung der Kardinalzahlen eingeführte Zusammenfassung der Systeme in Klassen, wobei immer zwei Systeme in eine Klasse gehören, wenn sie deutlich aufeinander abgebildet werden können, ist eine solche Konstruktion, welche ihre volle Bedeutung durch den Nachweis erhält, daß alle einfach unendlichen Systeme im obigen Sinne auf die Zahlenreihe abgebildet werden können, und jedes

endliche System auf einen geeigneten Teil der Zahlenreihe. Danach erscheinen die Kardinalzahlen als Repräsentanten von Klassen, also weder diese noch die Ordnungszahlen als inhaltsleere Zeichen, mit willkürlichen Operationsregeln, sondern als Ergebnis der Bildung und Zusammenfassung von Mengen. Dies ist besonders von H. Weber und, wie ich glaube, mit Recht betont worden.

Ein weiteres, nicht minder hervorzuhebendes Moment ist die positive Definition einer unendlichen Menge, als einer solchen, welche auf einen Teil ihrer selbst deutlich, das heißt eindeutig und eindeutig umkehrbar abgebildet werden kann. Die hier zutage tretende Gedankenverbindung geht sehr weit zurück und schon Galilei[11]) hat die hierin gelegene Besonderheit unendlicher Mengen hervorgeboben. Er erwähnt, daß die unendliche Menge der ganzen Zahlen weitaus größer zu sein scheint als die Menge der Quadratzahlen, da ja die Quadratzahlen immer seltener werden, je weiter man in der Zahlenreihe fortschreitet, während andererseits die Menge doch gleich sein müßte, weil zu jeder Zahl doch eine Quadratzahl gehört. Dieser Umstand, daß hier das Ganze nicht mehr zu enthalten braucht als einer seiner Teile, ist dann überhaupt gegen die Existenz des Unendlichen ins Feld geführt worden und unser Landsmann Bernhard Bolzano hat diesen Sachverhalt noch als eine dem Unendlichen anhaftende Paradoxie bezeichnet. Als eine Eigenschaft der unendlichen Mengen wurde die Möglichkeit, eine solche auf eine Teilmenge abzubilden, schon von G. Cantor erkannt.

Die Lösung des scheinbaren Widerspruches liegt eben darin, daß die Begriffe mehr, weniger, größer, kleiner bei Anwendung auf eine unendliche Menge nicht durchaus mehr den Gesetzen gehorchen können, welche in den einfachen Fällen, für welche sie zunächst gebildet sind, nämlich den

endlichen Mengen gelten und für diese — gegenüber dem früheren Geltungsbereich — neuen Dinge auch erst neu gebildet werden müssen.

Endlich an dritter Stelle ist hervorzuheben die Herleitung aller weiteren Eigenschaften aus wenigen ausdrücklich vorausgeschickten Sätzen, welche an einem als existierend angenommenen Gebilde erkannt und nachgewiesen sind.

Diese drei Bestandteile des Aufbaues, die Konstruktion eines Objektes, der Nachweis einer für die weitere Theorie ausreichenden Gruppe von Eigenschaften und endlich die Durchführung und Herleitung der grundlegenden Sätze, wird man als notwendige Bestandteile jeder Theorie fordern müssen, wenn sie vollständig befriedigen soll. Der erste Schritt schützt uns, wenn er von Erfolg begleitet ist, vor einem leeren Spiel mit Zeichen und gibt uns von vornherein die Gewißheit, daß die Ergebnisse des zweiten Schrittes, die Grundeigenschaften, miteinander verträglich und nicht etwa mit Widersprüchen behaftet sind, welche vielleicht erst spät zum Vorschein kommen und so unsere Arbeit zu einer unnützen machen, während der letzte Schritt die gewonnene Erkenntnis nutzbar macht und eigentlich erst den Bau aufführt, zu dem die beiden ersten Schritte den Grund gelegt haben.

Nun mag es streitig sein, ob die beiden ersten Schritte in einer Wissenschaft wie der Mathematik, welche mit dem Begriffe der ganzen Zahlen einerseits und den Raumvorstellungen andererseits so nahe an die einfachsten und tiefsten Fragen des menschlichen Denkens herangeht, auch ihrem eigenen Gebiete angehören, oder ob sie dabei nicht etwa in das Gebiet der Philosophie hinübergreifen. Immer aber wird man zugeben, daß ohne Rücksicht auf das mathematische Bedürfnis die vorliegenden Fragen kaum ihre volle

Lösung finden können. Die oft recht lebhaft zum Ausdruck kommenden Meinungsverschiedenheiten zwischen Mathematikern und Philosophen möchte ich vielmehr als einen Beweis des gemeinsamen Interesses auffassen, welches früher oder später zu einer Verständigung führen wird.

Die Einsicht aber und Sicherheit, daß wir im weiteren Verfolg einer Entwicklung niemals einem Widerspruche in sich begegnen, ist ein durchaus notwendiges Erfordernis. Es ist nun sehr merkwürdig, daß gerade auf dem hier bezeichneten Gebiete, und zwar bei der Ausbildung der von Georg Cantor geschaffenen systematischen Untersuchung unendlicher Systeme, also unendlicher Mengen, sich gezeigt hat, daß der Begriff der Gesamtheit aller Dinge einen Widerspruch[12]) enthält, wenn mit ihm so wie mit dem Begriff eines anderen Systems verfahren wird. Damit fällt nun allerdings der erste Teil der Dedekind'schen Konstruktion, aber doch ist die Hoffnung nicht ausgeschlossen, daß diese Lücke, also der Nachweis der Existenz unendlicher Systeme, ausgefüllt werden könnte. H. Weber[13]) hat wohl aus diesem Grunde auch den Begriff der Gesamtheit aller Dinge bei seiner Darstellung vermieden.

Der dritte Teil des besprochenen Aufbaues, der Aufbau der Theorie aus einer möglichst geringen Zahl von Axiomen und Erklärungen, ist eine alte methodische Forderung der Mathematik. Es ist das Muster der Elemente des Euklid, welches hier fortwirkt, und für die geometrische Forschung waren gerade diese Betrachtungen besonders bedeutsam sowohl wegen ihrer Beziehungen zu den Untersuchungen über die Natur unserer Raumvorstellungen als auch insbesondere deshalb, weil sie uns befähigt haben, die unwesentlichen und beschränkenden Vorstellungen, mit denen die Geometrie nach ihrer Entstehung verknüpft war, abzustreifen

und dadurch dem ganzen Gebiete erhöhte Fruchtbarkeit verliehen haben.

Auf die Theorie der ganzen Zahlen angewendet, wurde diese Methode von Peano[14]), welcher durch bestimmte sechs Forderungen, welche an die drei nicht weiter zu definierenden Begriffe der Zahl, der Einheit und der nächstfolgenden Zahl gestellt werden, die Grundlagen für die weitere Entwicklung gewinnt. Noch weiter sind andere Forscher[15]) gegangen, welche geradezu, zum Teile unter ausdrücklicher Berufung auf Helmholtz, die Zahlen lediglich als ein System von Zeichen erklärt haben, mit welchem nach bestimmten Regeln zu operieren sei. Auf allen diesen Auffassungen lastet nun die Aufgabe, die Widerspruchsfreiheit der getroffenen Festsetzungen ausdrücklich zu beweisen[16]), und zwar aus den verwendeten Regeln und Festsetzungen allein, da die Beziehung auf einen Inhalt und eine Bedeutung dieser Zeichen ja aufgegeben ist. Diese Auffassung hat die Frage nach der gegenseitigen logischen Abhängigkeit der Axiome der Arithmetik wesentlich geklärt und sie ist im Gegensatze zu dem mehr konstruktiven Aufbau der Erweiterungen des Begriffes der ganzen Zahl von Hilbert auch für diese ausdrücklich gefordert und ihre Durchführung skizziert worden.

Die Frage ist hier und für die Erweiterung der ganzen Zahlen von besonderer Wichtigkeit, weil wir für diese eine bequeme und übersichtliche Bezeichnung und eine sehr fein ausgebildete Technik ihres Gebrauches besitzen. Daher gelingt es für weitaus die meisten Fälle, die Frage nach der Widerspruchslosigkeit eines Systems von mathematischen Begriffen und Axiomen dadurch zu entscheiden, daß man mit Hilfe der Zahlen ein System von Dingen herstellt, in welchem diese Begriffe und Axiome Geltung haben. Auch gelingt es auf diesem Wege, den mannigfachen Fragen nach

dem Zusammenhang und der Abhängigkeit der Axiome untereinander beizukommen.

Hilbert [17]) hat diese Methode, welche er die axiomatische nennt, für das Gebiet der Geometrie mit großem Erfolg zur Geltung gebracht. Ich glaube, ich kann die hier vorliegende Tendenz nicht besser charakterisieren, als wenn ich Ihnen den Anfang der Hilbert'schen Grundlagen der Geometrie vorführe. Da heißt es: Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen; die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte, die des zweiten Systems nennen wir Gerade, die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen. Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie liegen etc. Die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.

Man sieht, hier ist jede Beziehung zur Anschauung, zur Vorstellung, ja zur Existenz solcher Dinge und ihrer gegenseitigen Beziehungen aufgegeben und um so dringender wird das Bedürfnis, ein System von Dingen, welches diesen Beziehungen genügt, auch wirklich aufzustellen. Mit Hilfe der Zahlen gelingt das nun überall ohne erhebliche Schwierigkeit, aber für die Zahlen selbst versagt naturgemäß diese Methode. Der Versuch Hilbert's [8]), auch für die Zahlen selbst diese Frage nach der Widerspruchslosigkeit zu lösen, liegt erst in einer Skizze vor und seine Erörterung würde uns zu weit führen.

Man kann weiter gehen und man ist weiter gegangen. Bertrand Russell [18]) hat überhaupt die ganze reine Mathematik zusammenfassen wollen als ein System von logischen Operationen in beschränkter Anzahl, angewendet auf gewisse, in beschränkter Zahl gegebene logische Konstanten. Auf der

anderen Seite hat Georg Cantor [19]) schon lange die Ansicht ausgesprochen, daß die einzige Bedingung für die Zulässigkeit eines mathematischen Begriffes seine Widerspruchsfreiheit und die Bestimmtheit seiner Beziehungen zu den vorhandenen Begriffen sei, daß jede weitere Beschränkung schädlich sei und besser der historischen Entwicklung überlassen bleibe, welche Unfruchtbares von selbst abstoße. Durch die Bestimmtheit der Beziehungen und die Widerspruchsfreiheit sei die intrasubjektive Existenz eines solchen Begriffes gewährleistet und mehr könne nicht verlangt werden.

Man kann sich kaum einen größeren Gegensatz denken, als er in diesen beiden Ansichten ausgedrückt ist. Auf der einen Seite strenge Gebundenheit in den Objekten und Hilfsmitteln, dazu die riesige Aufgabe, alles, was bereits vorhanden ist, diesem engen System wirklich einzuordnen, auf der anderen Seite völlige Freiheit und weitestgehende Möglichkeit der Ausgestaltung und ein Kriterium, welches allerdings formal das einzige ist, über das wir verfügen, welches aber im bejahenden Fall vielleicht nicht ausreicht, um die Existenz oder besser die Möglichkeit, die unter einen Begriff fallenden Objekte bestimmt denken und mit ihnen in Gedanken operieren zu können, zu sichern, außerdem aber vielleicht von der Beschaffenheit unseres Gehirnes und weiterhin von dem Zustande unserer Erkenntnis überhaupt abhängt [20]). Widersprüche hat man ja in den fruchtbarsten mathematischen Begriffen zu finden geglaubt und sie davon befreit zu haben ist gerade eine Hauptleistung der tieferen begrifflichen Untersuchungen der neueren Zeit. Die Bestimmtheit der Beziehungen aber läßt der Auffassung noch weiten Spielraum. Entspringt die eine Erklärung dem Trieb des ordnenden Systematikers, so entspricht die andere dem schöpferischen

Genie, welches keine anderen Schranken anerkennt als die der eigenen geistigen Schaffenskraft.

Lassen Sie mich zum Schluß noch wenige Worte über den Wert solcher Untersuchungen sagen. Er liegt meiner Ansicht nach außer in der Befriedigung der nun einmal geweckten Wißbegier auch vor allem darin, daß wir durch die genaue Analyse der Grundbegriffe unserer Wissenschaft zu einer Einsicht in das für ihre Leistungsfähigkeit Wesentliche gelangen, daß wir uns befreien von der ihnen durch die Entwicklung anhaftenden Form und dadurch eine größere Herrschaft über ihren Gebrauch und den Gebrauch unserer geistigen Fähigkeiten überhaupt erlangen. Je schwieriger und je komplizierter die Aufgaben der Anwendung werden, je verborgener die Möglichkeit ist, einfache und durchsichtige Gedankenbilder von der Erscheinungswelt zu gewinnen, desto ausgebildeter muß einerseits die Technik der Symbolik sein, die sie zu erfassen sucht, desto freier aber muß auch der Blick des Forschers sein und desto weniger darf er durch Konventionelles und Unwesentliches belastet werden. Denn die Wurzeln der Kraft des menschlichen Geistes liegen in der Einsicht.

Anmerkungen.

1) E. Mach, Erkenntnis und Irrtum, Leipzig 1905. S. 273.

2) Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller gewidmet. Leipzig 1887. S. 17 ff. Auch Ges. Abh. III. S. 359.

3) Man sehe L. Couturat, De l'infini mathèmatique, Paris 1896. S. 318 ff. E. Husserl, Philosophie der Arithmetik, Halle 1891. S. 190. ff.

4) In dem unter 2 angeführten Buch, S. 261 ff.

5) Man vergleiche dazu die Anmerkung 20 zu der deutschen Übersetzung von H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese von F. Lindemann, Leipzig 1904. F. Klein, die Arithmetisierung der Mathematik, Göttinger Nachrichten 1895.

6) Vgl. Georg Cantor, Zur Lehre vom Transfiniten, Halle 1890. S. 16 ff. Auch Zeitschrift für Philosophie 1887. S. 90.

7) In dem unter 5) zitierten Buch, S. 13 der Übersetzung.

8) Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904, Leipzig 1905. S. 174.

9) Poincaré an der unter 7 zitierten Stelle.

10) Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888.

11) E. Mach l. c. S. 327.

12) Über diese Widersprüche vgl. A. Schoenflies, Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 15. Bd. 1. I. 1906. Hier auch weitere Literatur.

13) Enzyklopädie der Elementarmathematik, Leipzig 1903. Hiezu neuerdings: Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1906, S. 173.

14) Rivista matematica I. 1891.

15) Vgl. z.B. J. Thomae, elementare Theorie der analytischen Funktionen, Hall 1898, und A. Pringsheim, Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung 1897. E. Heine, Journal für Mathematik 74 (1872).

16) D. Hilbert l. c.

17) Über die Grundlagen der Geometrie 2. Auflage, Leipzig Teubner 1903.

18) B. Russell, The principles of mathematics, Cambridge. 1903. Man vergleiche dazu den interessanten Artikel von Boutroux, Revue de Métaphysique et de Morale (Léon). 1905, Juli. Vgl. auch O. Hölder, Leipziger Berichte 1901. S. 2.

19) Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883. S. 19.

20) Vgl. die Korrespondenz zwischen Hadamard, Borel, Lebesgue, Baire im Bulletin de la société mathématique 1905. S. 261. bes. Hadamard auf Seite 270.

